GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/2.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

GRUPO I

Um doente esteve internado numa certa unidade hospitalar.

1. Na preparação de um medicamento para administrar ao doente, foram misturadas algumas substâncias. Uma das substâncias, pelas suas características, demorou algum tempo a ser despejada de um recipiente para uma tina.

Admita que a quantidade Q, em centilitros, da substância existente no recipiente, t minutos após o recipiente ter começado a ser esvaziado até ao momento em que ficou vazio, é dada por

$$Q(t) = 3 - \log_2(t+1)$$

Determine a quantidade de substância existente no recipiente no momento em que t foi igual a metade do tempo que este demorou a ficar vazio.

Apresente o resultado em centilitros, arredondado às décimas.

Se efetuar cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Durante o tempo de internamento, foi necessário fazer alguns registos da temperatura corporal do doente.

Num determinado dia, o primeiro registo foi feito às 0 horas e o último registo foi feito às 24 horas, não se tendo verificado nenhuma ocorrência de temperaturas iguais em registos consecutivos.

A temperatura corporal, T, em graus Celsius, do doente, às x horas desse dia, pode ser modelada por uma função polinomial do terceiro grau, de variável independente x, com $x \in [0, 24]$

2.1. De acordo com os registos desse dia, verificou-se que a taxa de variação média da temperatura corporal do doente, das 0 horas às 12 horas, foi positiva. Porém, essa informação não é suficiente para se concluir que a temperatura corporal do doente, durante essas doze horas, esteve **sempre** a aumentar.

Apresente um motivo que justifique que a informação disponível não é suficiente para se chegar à conclusão acima referida.

2.2. Do relatório que descrevia a situação do doente nesse dia constava a informação seguinte:

«(…) A temperatura corporal do doente variou ao longo do dia, admitindo-se que o valor mínimo ocorreu pelas 4 *horas e* 30 *minutos e que o valor máximo ocorreu pelas* 17 *horas e* 30 *minutos. Às* 23 *horas, a temperatura estava a descer cerca de meio grau Celsius por hora. (…)»*

De acordo com a descrição apresentada no relatório, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função que dá, em graus Celsius por hora, a taxa de variação instantânea da função T no instante x

A) $-0{,}0099\,x^2+0{,}2182\,x-0{,}7815$

B) $-0{,}0037\,x^2+0{,}0772\,x-0{,}3309$

C) $+0{,}0051x^2-0{,}1123\,x+0{,}4021$

D) $-0{,}0051\,x^2+0{,}1124\,x-0{,}4026$

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das três expressões que não podem definir essa função, uma razão que justifique essa impossibilidade.

Nos cálculos que efetuar, utilize valores arredondados às décimas.

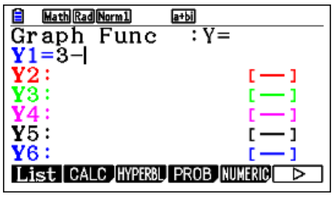
Proposta de resolução

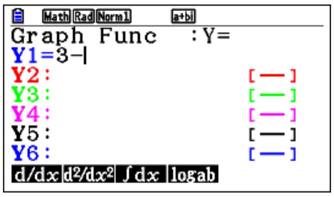
1.1.

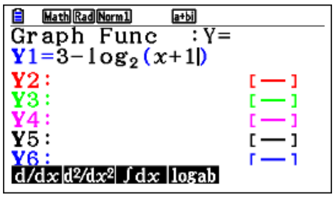
O tempo que o recipiente demorou a ficar vazio é o zero da função *Q*, pelo que é necessário calcular o zero da função *Q*.

Introduz-se a função *Q*, na calculadora gráfica

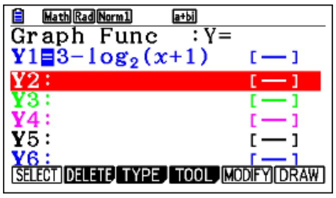
Para introduzir o $\log_2(x-1)$, vamos a OPTN, selecionamos CALC (F2) e encontramos em F4 logab.

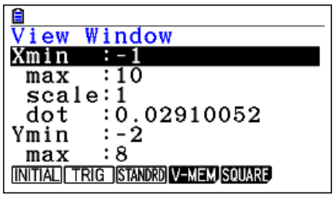


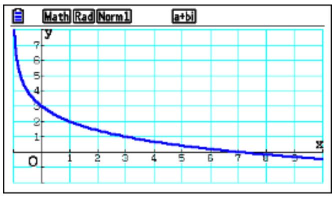




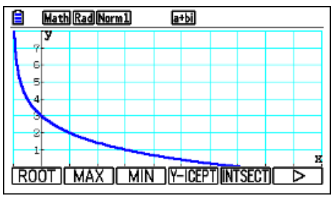
Depois de introduzido a expressão, defina a janela de visualização e represente graficamente a função.

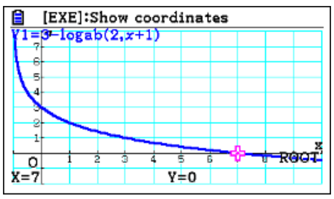






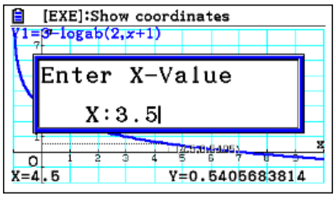
Para obter o zero da função, seleccionamos F5 (G-SOLV) seguido de F1 (ROOT)

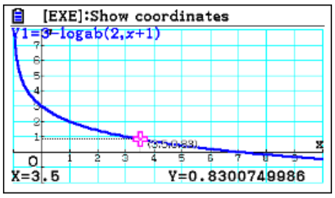




Através da observação do gráfico, conclui-se que o zero da função é 7. Assim, pretende-se saber qual a quantidade de substância existente no recipiente no momento em que *t* foi igual a metade do tempo que este demorou a ficar vazio, ou seja, para $t = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Activando o trace (F1), introduzimos 3,5 e obtemos o resultado, para a quantidade de substancia existente no recipiente quando t=3,5.





A quantidade de substância existente no recipiente no momento em que *t* foi igual a metade do tempo que este demorou a ficar vazio é aproximadamente 0,8 centilitros.

2.2.

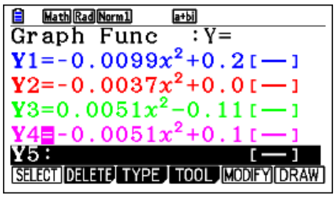
Nesta questão introduzimos as 4 expressões no menu gráfico e vamos estudar:

- *"A temperatura corporal do doente variou ao longo do dia, admitindo-se que o valor mínimo ocorreu pelas 4 horas e 30 minutos e que o valor máximo ocorreu pelas 17 horas e 30 minutos."*

Teremos de verificar se os zeros da função correspondem a x=4,5 e x=17,5

"Às 23 horas, a temperatura estava a descer cerca de meio grau Celsius por hora"

Vamos verificar se para x=23 o valor de y é -0,5

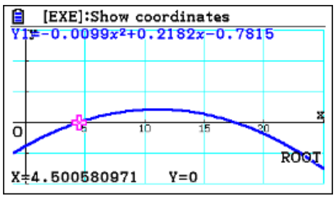


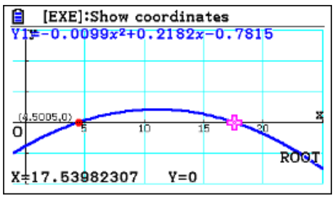
Vamos activar e desactivar usando a opção F1 (SELECT) e estudar individualmente cada função:

Para

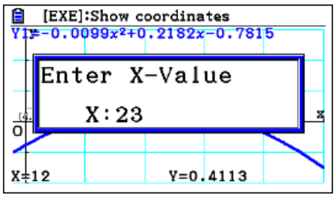
A) $-0{,}0099x^2 + 0{,}2182x - 0{,}7815$

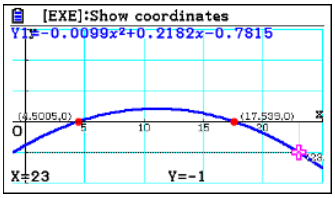
Calculo dos zeros, usando F5 (G-SOLV), seguido de F1 (ROOT). A calculadora devolve o 1º zero. Para encontrar o segundo zero, usamos a seta do cursor para a direita.





Para verificar a 2ª condição, usamos o trace (F1), introduzimos o valor 23 e pressionamos EXE.
A expressão apresentada em A não está correta, porque para *x=23* toma o valor -1, o que significaria que a temperatura estava a descer um grau Celsius por hora e não cerca de meio grau Celsius por hora, como consta no relatório.

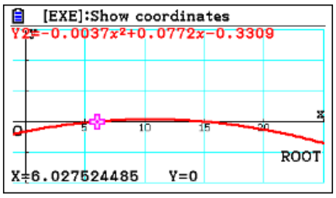


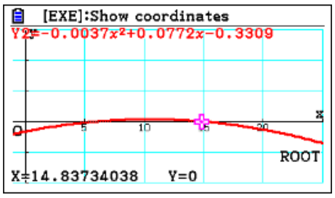


Para

B) $-0.0037x^2+0{,}0772x-0{,}3309$

Vamos verificar a primeira condição (zeros da função).
Apesar da função conter dois zeros, não são os zeros pedidos na 1ª condição do problema.

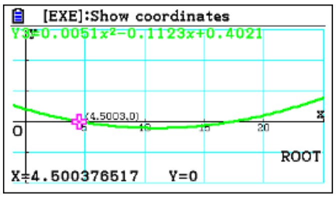


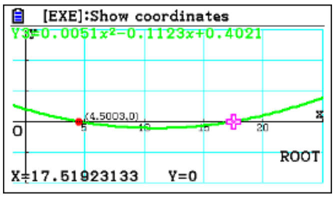


Para

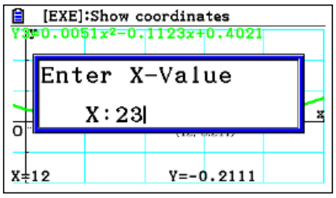
C) $+0{,}0051x^2-0{,}1123x+0{,}4021$

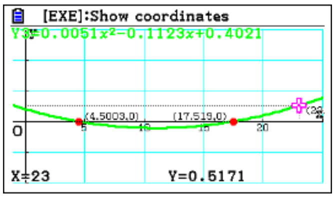
Verificamos que os zeros da função são os referidos na condição.





Para *x = 23* toma o valor 0,5, aproximadamente, o que significaria que a temperatura estava a crescer meio grau Celsius por hora e não a descer cerca de meio grau Celsius por hora, como consta do relatório.

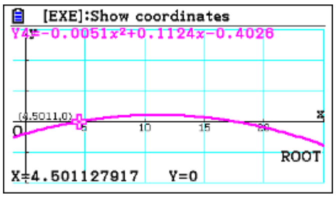


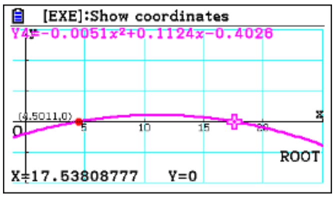


Para

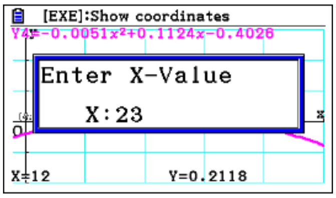
D) $-0{,}0051x^2+0{,}1124x-0{,}4026$

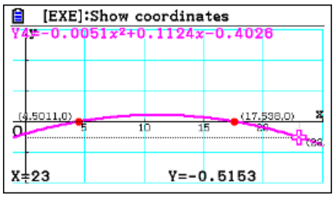
1º condição: zeros da função





2ª condição x=23 temos o valor de y aproximadamente -0,5.





A expressão correta é a apresentada em D.

A expressão D define a função que dá, em graus Celsius por hora, a taxa de variação instantânea da função T no instante *x*, tal que:

- para *x = 4,5*, o seu valor seja zero (pois *x = 4,5* é um mínimo da função T);
- para *x = 17,5,* o seu valor seja zero (pois *x = 17,5* é um máximo da função T);
- para *x = 23*, o seu valor seja -0,5 (pois a temperatura estava a descer cerca de meio grau Celsius por hora).

GRUPO II

2. Conforme foi descrito, no jogo Choque de Triângulos, a abcissa do ponto P depende do número inscrito na face que ficar voltada para cima no lançamento do dado.

Seja x a abcissa do ponto P

2.1. Mostre que a função que dá a área do triângulo $[NOP]$, para cada valor de x, pode ser definida por

$$f(x) = 0{,}5x^2 \quad \text{com} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.2. A função que dá a área do triângulo $[MNB]$, para cada valor de x, pode ser definida por

$$g(x) = 0{,}25x^2 - 4x + 16 \quad \text{com} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Note que a área do triângulo $[NOP]$, para cada valor de x, é dada por

$$f(x) = 0{,}5x^2 \quad \text{com} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.2.1. Num jogo do Choque de Triângulos, o quadrante I foi atribuído ao Diogo e o quadrante II ao Eduardo.

Nesse jogo, a face que ficou voltada para cima, no lançamento do dado, tinha inscrito o número 4.

Quem ganhou o jogo?

Justifique a sua resposta.

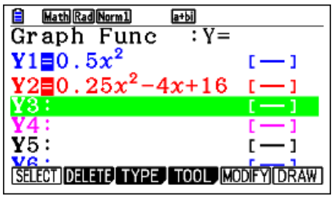
2.2.2. Mostre que, em qualquer jogo do Choque de Triângulos, existe sempre um, e apenas um, vencedor.

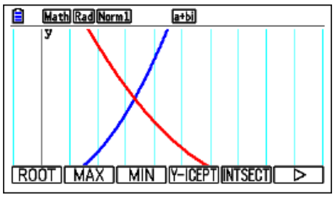
Proposta de resolução:

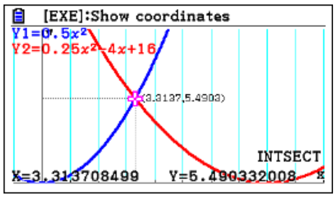
2.2.2

Para que exista empate no jogo, as áreas dos triângulos têm que ser iguais, isto é, $f(x) = g(x)$

Introduzimos as duas funções na calculadora e vamos calcular o ponto de interseção, usando F5 (G-SOLV) seguido de F5 (INTSECT).







Através da observação da calculadora gráfica conclui-se que, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x \approx 3{,}31$

Como $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$, pode-se concluir que nunca há empate, ou seja, existe sempre um e um só vencedor.